1. Figuras geométricas.

La parte del espacio que ocupa un objeto físico se llama un **sólido geométrico**.

Un sólido geométrico está separado del espacio circundante por una **superficie**.

Una parte de la superficie está separada de una parte adyacente por una **línea** (una curva).

Una parte de la línea está separada de una parte adyacente por un **punto**.

El sólido geométrico, la superficie, la línea y el punto no existen separadamente. Sin embargo como una abstracción podemos considerar una superficie independientemente del sólido geométrico, una línea independientemente de la superficie y el punto independientemente de la línea. Al hacerlo debemos pensar que una superficie no tiene grosor, que una línea no tiene ni grosor ni anchura y que un punto no tiene longitud ni anchura ni grosor.

Un conjunto de puntos, rectas, superficies o sólidos geométricos colocados de una cierta manera en el espacio se llama generalmente una **figura geométrica**. Las figuras geométricas se pueden mover a través del espacio sin cambiar. Dos figuras geométricas se llaman **congruentes**, si al mover una de las figuras es posible superponer ésta sobre la otra de tal manera que las dos figuras se identifican entre sí en todas sus partes.

2. Geometría.

Una teoría que estudia las propiedades de las figuras geométricas se llama **geometría**, que se traduce del griego como *medición de la tierra.* Se le dio este nombre a la teoría porque el propósito general de la geometría en la antigüedad era medir las distancias y las áreas en la superficie de La Tierra.

Los primeros conceptos de la geometría así como sus propiedades básicas se presentan como idealizaciones de las nociones comunes y las experiencias de la vida diaria.

3. El plano.

La más familiar de todas las superficies es la superficie plana, o el **plano**. La idea del plano se percibe [expresa] [transmite] en el vidirio de una ventana, o en la superficie del agua de un charco [estanque] tranquilo.

Notemos la siguiente propiedad del plano: *Se puede superponer un plano sobre sí mismo o sobre otro plano cualquiera de tal manera que se lleva un punto dado del plano a cualquier otro punto dado; y esto se puede hacer también después de voltear el plano al revés.*

4. La línea recta.

La línea más simple es la **línea recta** o la **recta**. La imagen de un hilo delgado tensado o la de un rayo de luz emitido a través de un hoyito dan una idea de lo que es un línea recta. La siguiente propiedad fundamental de la línea recta coincide bien con estas imágenes:

Por cada dos puntos del espacio, hay una línea recta que pasa a través de ellos y una recta tal es única.

Se sigue de esta propiedad que:

Si dos líneas rectas se acomodan de tal manera que dos puntos de una coinciden con dos puntos de la otra, entonces las rectas también coinciden en todos sus otros puntos (porque de otra manera tendríamos dos rectas distintas que pasan por los mismos dos puntos, lo que es imposible).

FIGURE 1

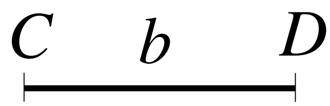

FIGURE 2

FIGURE 3

Por la misma razón, *dos líneas rectas se pueden intersecar a lo más en un punto.*

Una recta puede estar en un plano. Lo siguiente es correcto:

Si una recta pasa por dos puntos de un plano, entonces todos los puntos de esta recta están en este mismo plano.

5. La línea recta ilimitada. El rayo. El segmento.

Si se piensa que una línea recta se extiende indefinidamente en ambas direcciones, entonces se llama una recta **infinita** (o **ilimitada**).

Usualmente una línea recta se denota con dos letras mayúsculas que marcan dos de sus puntos. Se dice "la recta AB" o "la recta BA" (Figura 1).

Una parte de la recta acotada por ambos lados se llama un **segmento de recta**. Usualmente se denota con dos letras que marcan sus extremos (el segmento CD, Figura 2). A veces una línea recta o un segmento se denota con una letra minúscula; se dice "la línea recta a, o el segmento b".

En vez de decir "una línea recta ilimitada" o "un segmento de recta", usualmente decimos **una recta** o **un segmento**, respectivamente.

A veces se considera una recta que termina sólo en una dirección, por ejemplo en el extremo E de la Figura 3. Una recta tal se llama **un rayo** (o **una semirecta**) trazada desde E.

6. Segmentos congruentes e incongruentes.

Dos segmentos son congruentes si se pueden colocar uno sobre el otro de tal manera que sus extremos coinciden. Supóngase por ejemplo que ponemos el segmento AB sobre el segmento CD (Figura4) colocando el punto A en el punto C y alineando el rayo AB con el rayo CD. Si, como resultado de esto, el punto B y D se enciman, entonces los segmentos AB y CD son congruentes. De otra manera no son congruentes y el que es una parte del otro se considera más chico.

Para marcar sobre una recta un segmento congruente con otro segmento dado se usa el **compás**, un instrumento de dibujo con el que suponemos que el lector está familiarizado.

FIGURE 4

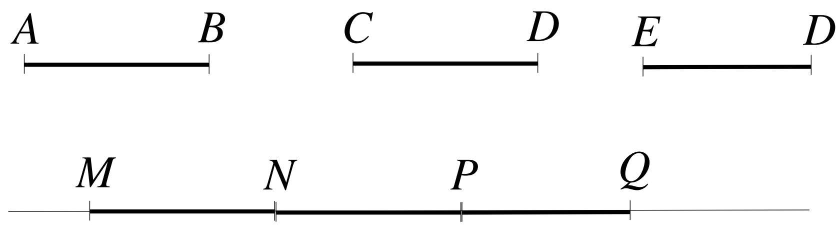

FIGURE 5. .

7. SUMA DE SEGMENTOS.

La suma de varios segmentos dados (AB, CD, EF, Figura 5) es un segmento que se obtiene como sigue. Sobre una recta escogemos cualquier punto M y comenzando desde éste marcamos un segmento MN congruente con AB, entonces marcamos el segmento NP congruente con CD y el PQ congruente con EF, todos en la misma dirección que MN. Entonces el segmento MQ será la suma de de los segmentos AB, CD y EF (que se llaman los **sumandos** de esta suma). Se puede obtener de manera similar la suma de cualquier número de segmentos.

La suma de segmentos tiene las mismas propiedades que la suma de números. En particular no depende del orden de los sumandos (la ley **conmutativa**) y queda inalterada cuando algunos de los sumandos se reemplazan con su suma (la ley **asociativa**). Por ejemplo:

$$AB + CD + EF = AB + EF + CD = EF + CD + AB = \cdots$$

y

$$AB + CD + EF = AB + (CD + EF) = CD + (AB + EF) = \cdots .$$

8. OPERACIONES CON SEGMENTOS.

El concepto de suma de segmentos da lugar al concepto de resta de segmentos y multiplicación y división de segmentos con números enteros. Por ejemplo, la diferencia de AB y CD (si $AB > CD$) es un segmento cuya suma con CD es congruente con AB; el producto del segmento AB con el número 3 es la suma de tres segmentos cada uno congruente con AB; el cociente del segmento AB entre el número 3 es una tercera parte de AB.

Si unos segmentos dados están medidos con ciertas unidades lineales (por ejemplo, centímetros) y sus longitudes están expresadas mediante los números correspondientes, entonces la longitud de la suma de los segmentos se expresa con la suma de los numeros que miden estos segmentos, la longitud de la diferencia se expresa con la diferencia de los números, etc.

9. LA CIRCUNFERENCIA.

Si abrimos el compás a una apertura cualquiera y colocamos su parte con punta en algún punto O del plano (Figura 6), y comenzamos a girar el compás alrededor de este

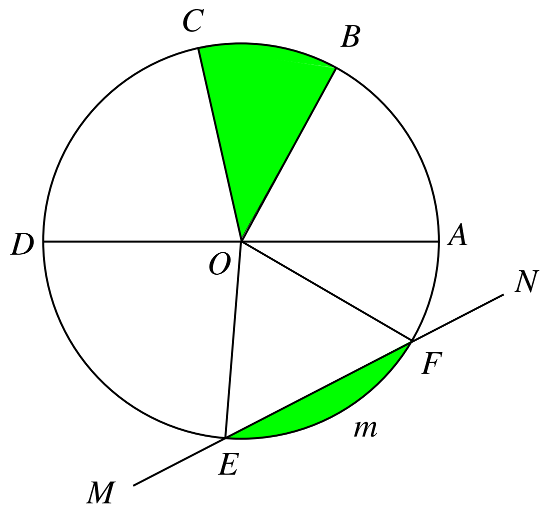

FIGURE 6

punto, entonces la otra parte equipada con un lapiz que toca al plano describirá sobre el plano una línea curva continua cuyos puntos estarán a la misma distancia de O. Esta línea curva se llama una **circunferencia** y el punto O su **centro**. Un segmento (OA, OB, OC en la Figura 6) que conecta al centro con un punto de la circunferencia se llama un **radio**. Todos los radios de una misma circunferencia son congruentes.

Las circunferencias descritas por el compás abierto en el mismo radio son congruentes porque al colocar sus centros en el mismo punto se identificarán las circunferencias en todos sus puntos.

Una recta (MN, Figura 6) que se inerseca con la circunferencia en cualesquiera dos puntos se llama una **secante**.

Un segmento (EF) cuyos dos extremos están en la circunferencia se llama una **cuerda**.

Una cuerda (AD) que pasa a través del centro se llama un **diámetro**. Un diámetro es la suma de dos radios y por lo tanto todos los diámetros de la misma circunferencia son congruentes.

Una parte de una circunferencia contenida entre dos puntos cualesquiera (por ejemplo, EmF) se llama un **arco**.

La cuerda que conecta los extremos de un arco se dice que **subtiende** a ese arco.

Un arco a veces se denota con el signo $\frown$, por ejemplo, se escribe: $\overset{\frown}{EmF}$.

La parte del plano delimitada por una circunferencia se llama un **disco** (o un **círculo**).[1]

La parte de un disco contenida entre dos radios (la parte sombreada COB en la Figura 6) se llama un **sector** y la parte del disco cortada por una secante (la parte EmF) se llama un **segmento de disco**.

[1] a veces la palabra "círculo se usa en lugar de "circunferencia". Sin embargo se debe evitar esto, pues el uso del mismo término para conceptos diferentes puede llevar a errores.

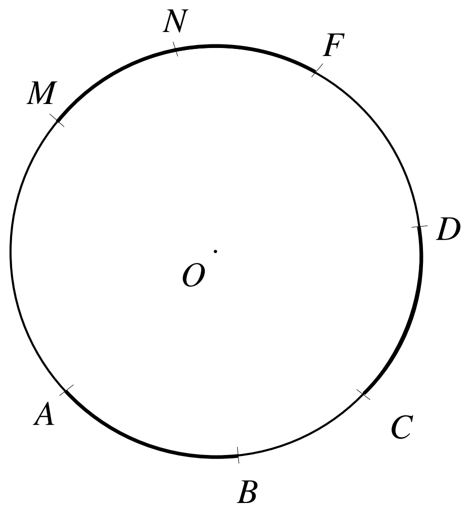

FIGURE 7

10. ARCOS CONGRUENTES E INCONGRUENTES.

Dos arcos de la misma circunferencia (o de dos circunferencias congruentes) son congruentes si se pueden alinear de tal manera que sus extremos coinciden. En efecto supóngase que alineamos el arco AB (Figura 7) con el arco CD identificando el punto A con el punto C y dirigiendo el arco AB a lo largo del arco CD. Si, como resultado de esto, los extremos B y D coinciden, entonces todos los puntos intermedios de estos arcos coinciden también, ya que están a la misma distancia del centro y, por lo tanto, $\widehat{AB} = \widehat{CD}$. Pero si B y D no coinciden, entonces los arcos no son congruentes y aquél que es parte del otro se considera más chico.

11. SUMA DE ARCOS.

La suma de varios arcos del mismo radio dados se define como un arco del mismo radio que está compuesto de partes congruentes con, respectivamente, los arcos dados. Así, tómese un punto arbitrario M (Figura 7) de la circunferencia y márquese la parte MN congruente con AB. A continuación moviéndose en la misma dirección a lo largo de la circunferencia, márquese la parte NP congruente con CD. Entonces el arco MP se la suma de los arcos AB y CD.

Al sumar arcos del mismo radio se puede encontrar la situación de que la suma de los arcos no cabe en la circunferencia y uno de los arcos cubre parcialmente a otro. En este caso la suma es un arco más grande que la circunferencia completa. Por ejemplo, al sumar los arcos AmB y CnD (Figura 8) obtenemos el arco que consiste de toda la circunferencia y el arco AD.

De manera similar a la suma de segmentos de recta, la suma de arcos obedece las leyes de conmutatividad y de asociatividad.

Del concepto de suma de arcos, se derivan los conceptos de resta de arcos y multiplicación y división de arcos por un número entero de la misma manera que se hizo con los segmentos.

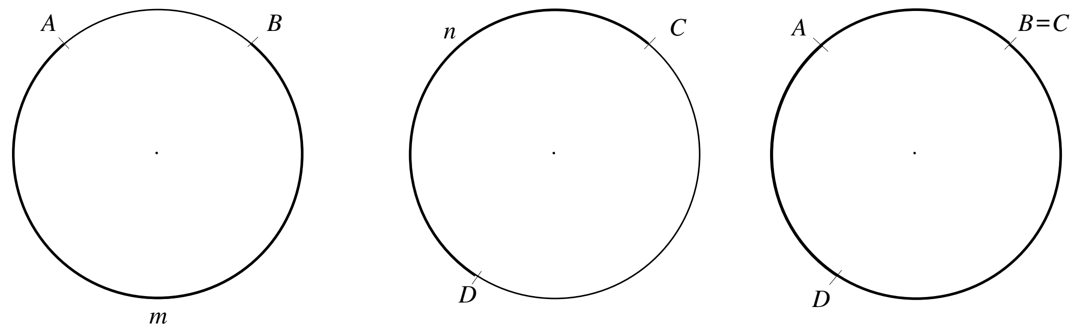

FIGURE 8

12. DIVISIONES DE LA GEOMETRÍA.

El tema de la geomería se puede dividir en dos partes: la **geometría plana**, o **planimetría** y la **geometría sólida** o **estereometría**. La planimetría estudia las propiedades de aquellas figuras cuyos elementos caben en el mismo plano.

EJERCICIOS

(1) Da ejemplos de sólidos geométricos delimitados por uno, dos, tres o cuatro planos (o partes de planos).
(2) Muestra que si una figura geométrica es congruente con otra figura geométrica que a su vez es congruente con una tercera figura geométrica, entonces la primera figura geométrica es congruente con la tercera.
(3) Explica *por qué* dos rectas en el espacio pueden intersecarse en a lo más un punto.
(4) Como en el Apartado 4, muestra que un plano que no contiene a una recta dada puede intersecarse con ella a lo más en un punto.
(5) Da un ejemplo de una superficie distinta del plano tal que, como el plano, se puede superponer sobre ella misma de tal manera que lleva cualquier punto dado sobre cualquier otro punto dado.
(6) Como en el Apartado 4, muestra que para cada dos puntos de un plano, hay una recta contenida *en este plano* y que pasa por estos puntos y que esta recta es única.
(7) Usa una regla para dibujar una línea que pasa por dos puntos dados en una hoja de papel. Piensa cómo confirmar que la línea es efectivamente una recta.
Sugerencia: Pon la regla de cabeza.
(8) Dobla una hoja de papel y, usando el problema anterior, verifica que la orilla del doblez es recta. ¿Puedes explicar por qué el doblez de una hoja doblada es recto?
(9) Muestra que por cada punto de un plano hay una línea recta en este plano que pasa por este punto. ¿Cuántas de estas rectas hay?
(10) Encuentra superficies distintas del plano que, como el plano, junto con cada punto en la superficie contienen una línea recta que pasa a través del punto.
Sugerencia: Se pueden encontrar superficies así al torcer una hoja de papel.

(11) Como en la definición de congruencia de figuras dada en el Apartado 1, muestra que cada par de líneas rectas infinitas son congruentes y que todo par de rayos son congruentes.

(12) Sobre una recta dada, marca un segmento congruente a cuatro veces un segmento dado, pero usa el compás el menor número de veces posible.

(13) ¿La suma de segmentos dados es única? Da un ejemplo de dos segmentos tal que ambos son la suma de dos segmentos dados. Muestra que estos segmentos distintos son congruentes.

(14) Da un ejemplo de dos arcos no congruentes cuyos extremos coinciden. ¿Arcos así pueden estar circunferencias no congruentes? ¿o en circunferencias congruentes? ¿o en la misma circunferencia?

(15) Da ejemplos de arcos no congruentes subtendidos por cuerdas congruentes. ¿Hay cuerdas incongruentes que subtienden arcos congruentes?

(16) Describe explícitamente la operación de resta de arcos y de la multiplicación y división de un arco con un número entero.

(17) Sigue la descipción de las operaciones con arcos y muestra que multiplicar un arco dado por 3 y después dividir el resultado entre 2, obtenemos un arco congruente al arco que resulta de las mismas operaciones realizadas en el mismo arco pero en orden inverso.

(18) ¿Las sumas de segmentos de recta respectivamente congruentes, pueden ser no congruentes? ¿Las sumas de de segmentos respectivamente incongruentes, pueden ser congruentes?

(19) Sigue la definición de suma de segmentos (o arcos) y explica por qué la adición de segmentos (o arcos) obedece la ley conmutativa.
Sugerencia: Identifica un segmento (o arco) AB con BA.